Introdução

Buscar relações entre Matemática e Música não é um fato inédito no que se refere a pesquisas. Existem relatos que tratam disso com pelo menos 2500 anos. O que talvez seja novo nesse sentido é trazer esta experiência, tanto para professores de Matemática que querem uma conquista um pouco maior de sua turma, minimizando a velha imagem de sua disciplina como puramente "ciência abstrata" e fora da realidade, quanto para professores de Música que, através de simples conceitos matemáticos como, por exemplo, o de razão, podem facilitar a aprendizagem de uma arte muitas vezes relacionada apenas com o dom. Este trabalho busca também saciar culturalmente amantes de ambas as áreas.

Leibniz dizia que "a música era um exercício oculto de aritmética de uma alma inconsciente que lida com números". Boethius explicava que cada som era composto de certas quantidades, cujo estabelecimento era devido a proporções, donde concluía que a associação de sons era governada por estas estudadas através dos números. Fato interessante é que, muitos matemáticos desconhecem o intelecto da Música, da mesma forma que muitos músicos desconhecem a estética da Matemática.

Paremos para analisar algumas relações interessantes entre ambas as áreas. Os tamanhos das cordas de um piano estão diretamente ligados aos sons que ele produz, bem como a experiência de Pitágoras com o Monocórdio, instrumento de uma corda criado pelo pensador visando o estudo entre as relações dos sons e subdivisões desta corda, que será mais bem explicada no decorrer deste trabalho. Além disso, podemos considerar o próprio formato do instrumento, que se assemelha aos gráficos de funções trigonométricas e logarítmicas, como mostra a figura abaixo. Outro exemplo

Órgão de tubos

Cauda de um piano

ocorre no órgão de tubos, onde ocorrem variações de comprimentos e espessuras, observando-se que quão maior é o tubo, mais grave é o som devido à passagem de ar por seu interior (experiência também descrita por Pitágoras através de tubos de bambu como comprovação do experimento com cordas). Podemos citar também os compassos da bateria de uma escola de samba, que tanto nos anima no Carnaval, verificando a ordenação de seu mestre para que a cada batida de um surdo se toquem quatro de uma caixa, sendo ambos os instrumentos de percussão, ou ainda as dimensões e os sons emitidos pelos sinos de uma catedral, dentre outros inúmeros exemplos.

Este trabalho encontra-se dividido em três capítulos: O primeiro busca trazer informações que sirvam como base auxiliar para um melhor entendimento de termos um pouco mais técnicos e ferramentas necessárias para a melhor compreensão do proposto; O segundo capítulo traz todo o processo de construção de escalas através de cálculos matemáticos, sobretudo a escala pitagórica (uma das primeiras) e a escala temperada (bastante utilizada nos tempos atuais); E o terceiro capítulo visa contar de forma sintética um pouco da evolução das bases das relações entre Matemática e Música e apontar os principais personagens destas relações, de modo a mostrar um pouco mais desta história que muitas vezes destaca Pitágoras como único estudioso da interlocução entre as áreas. De uma maneira geral, este projeto tem por ambição apresentar algumas das diversas relações existentes entre Matemática e Música, que além de desconhecidas por muitos, podem tanto enriquecer culturalmente profissionais de ambas as áreas, quanto desempenharem uma função de facilitador na relação ensino-aprendizagem de uma disciplina para outra, biunivocamente.

Podemos então dizer que a composição matemática de uma música, através das técnicas, tons, escalas e sintonias, mostra que "a matemática não é uma ciência fechada, relacionando-se com diversas outras áreas", como diz Harkleroad, e que as relações entre ambas vão muito além dos padrões abstratos de aprendizagem através de linguagens simbólicas peculiares. Resta-nos, então, questionar: **Podemos observar sons através de gráficos? Quais são as relações numéricas existentes na construção de uma escala musical?**

Capítulo 1: Conceitos Preliminares

1.1. A música

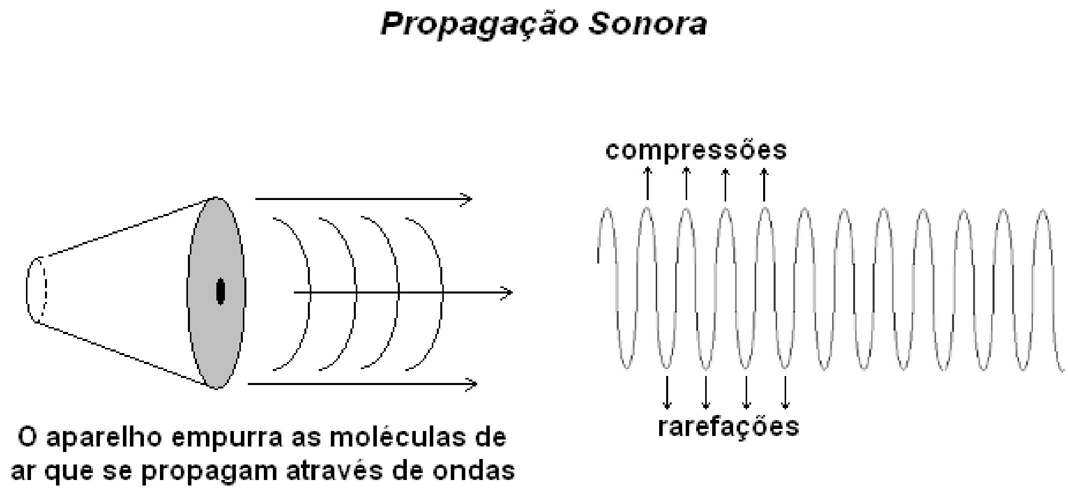
O termo música tem sua origem na Grécia Antiga, significando "a arte das musas". Constitui-se de relações entre a presença e a ausência de sons ou simplesmente de organizações de seus diferentes tipos, podendo ser considerada uma das mais antigas formas de arte, uma vez que é conhecida e praticada desde a pré-história. Acredita-se que esta arte foi desenvolvida a partir da percepção dos "barulhos" produzidos pela natureza, bem como o exemplo do som do vento ou de um rio, ou ainda, o mais belo canto de um pássaro, aguçando e desenvolvendo a percepção auditiva humana. Esta "forma de expressão", como muitos gostam de chamar, está incluída no dia-a-dia de quase todas as pessoas, através de suas mais diversas classificações, servindo para alegrar ou para entristecer, estando presente nos mais diversos meios, agindo inclusive, de forma terapêutica.

Platão entendia a música tanto como um elemento de harmonia ou equilíbrio que aproximava o homem dos deuses, através da lira ou da cítara, por exemplo, quanto elemento de decadência ou degeneração que nos aproximavam de animais, citando como exemplo as músicas populares da época.

1.2. O som e a acústica

A acústica é o estudo do fenômeno sonoro e pode ser subdividida em diversos setores. A acústica física estuda a parte material do fenômeno sonoro através de formas e volumes, enquanto a psicoacústica relaciona os diversos tipos de percepção deste fenômeno. Existe ainda um ramo destinado à parte fisiológica das estruturas dos aparelhos fonador e auditivo dos seres vivos e, o que mais nos interessa para o desenvolvimento deste trabalho, a acústica musical, que trata da relação dos dados coletados nestas subdivisões com a atividade artística.

O som é o resultado da percepção de distúrbios, que se apresentam em forma de ondas, das moléculas de um meio em certo espaço de tempo. A ocorrência deste fenômeno depende de três elementos: emissor, meio e receptor. O emissor produz um distúrbio no meio que será percebido pelo receptor. O meio, por sua vez, tem total influência na qualidade do distúrbio, que é o responsável pela forma de propagação. Estes distúrbios, de natureza mecânica, são pequenas variações de pressão do meio, causadas pelo movimento das moléculas, que formam ondas longitudinais sonoras, responsáveis pela movimentação do som na mesma direção de propagação, a uma velocidade constante, normalmente através do ar. Pode-se dizer que o som é o resultado de oscilações bem rápidas, através da compressão e



rarefação destas moléculas de ar, que serão captadas pelo nosso ouvido, como ilustra a figura acima. É possível verificar estas ondas através da vibração de partes específicas de cada instrumento, como cordas ou membranas que constituem a pele de um instrumento de percussão, sendo dependente dentre outros, da densidade do material.

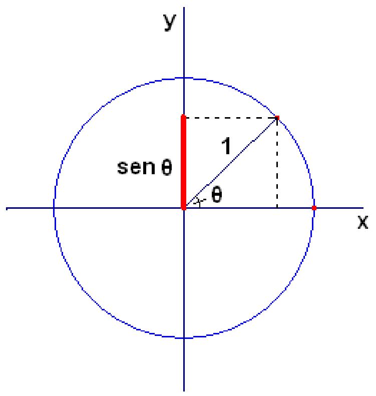
1.3. Propagação do som e a função seno

Os fenômenos ondulatórios mais simples podem ser analisados através de funções harmônicas periódicas do tipo senoidal. Apesar de nenhum som natural ser capaz de produzir uma senóide pura, podemos obter resultados bem próximos, como o exemplificado, através do som de um diapasão, aparelho bastante importante na afinação de instrumentos e vozes, mediante a vibração de um som musical de altura específica.

Adotando a função seno como modelo de análise da propagação sonora, podemos correlacionar alguns de seus parâmetros com nossas qualidades sensoriais. A amplitude de uma onda de pressão, isto é, sua magnitude de oscilação, é diretamente ligada à nossa percepção de intensidades sonoras, ou seja, se o som é forte ou fraco. Quanto mais intenso for um som, maior será a amplitude de variação da pressão do meio, ou ainda, ocorrerá um maior deslocamento de moléculas. Frequência, período e comprimento de onda são correlacionados com a percepção de alturas, isto é, se o som é grave ou agudo. Em particular, convencionam-se certos valores de frequências para algumas notas musicais ocidentais como, por exemplo, uma nota SOL que pode ter frequência 392Hz ou uma nota LÁ, com 440Hz (Lembrando que o Hertz (Hz) é uma unidade de medida de frequência f =

1/T, onde T é o período de tempo, definida através dos ciclos por segundo de uma onda periódica como a senóide). Uma maneira simples de entender frequência é compará-la com pulsações ou batidas. Sendo assim, se conseguíssemos dar 440 passos em um segundo produziríamos uma nota LÁ, ou seja, um LÁ é produzido por 440 batidas ou pulsações por segundo, supracitado como 440Hz.

Usando a definição usual da função seno de um ângulo θ qualquer no ciclo trigonométrico de raio 1, cujo perímetro vale 2π, centrado em um sistema de eixos cartesianos perpendiculares x e y, podemos verificar facilmente que y = senθ, como descrito abaixo. Aplicando a definição, temos que:

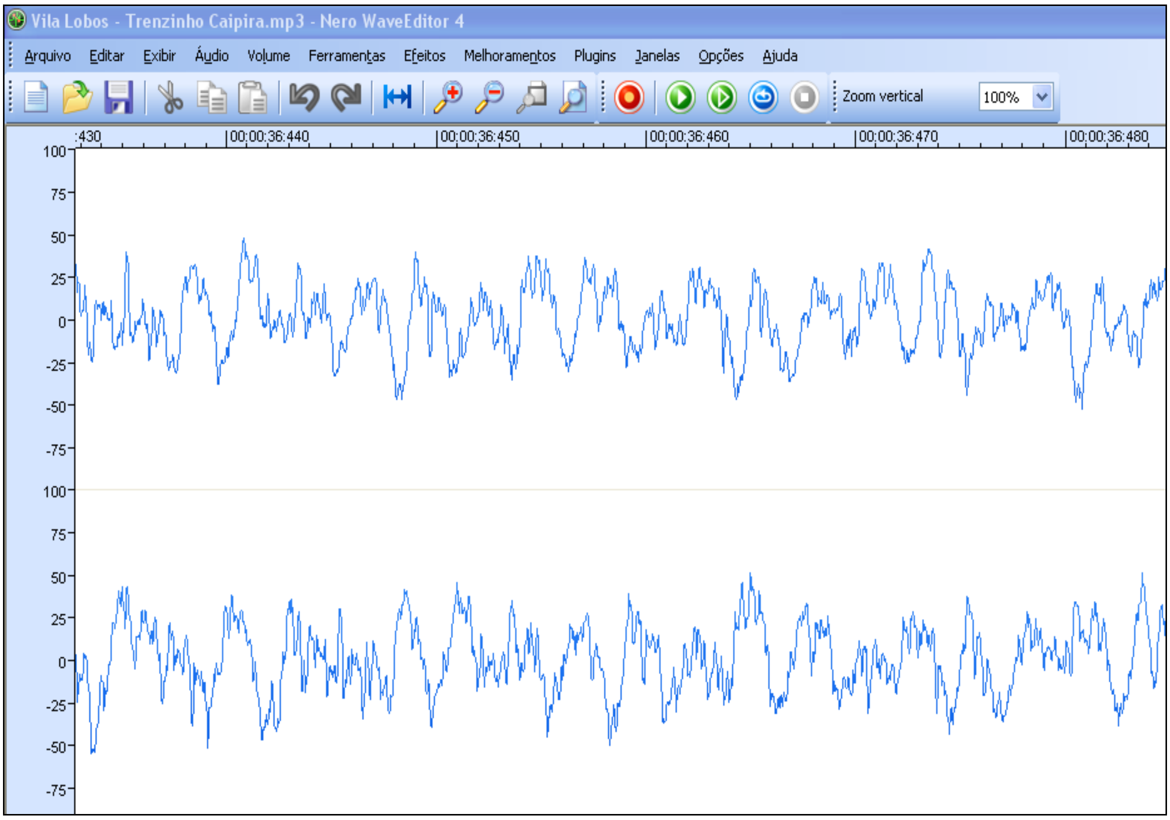


$$\text{sen}\theta = \frac{y}{1} \Longrightarrow y = \text{sen}\theta \,.\, 1 \Longrightarrow y = \text{sen}\theta$$

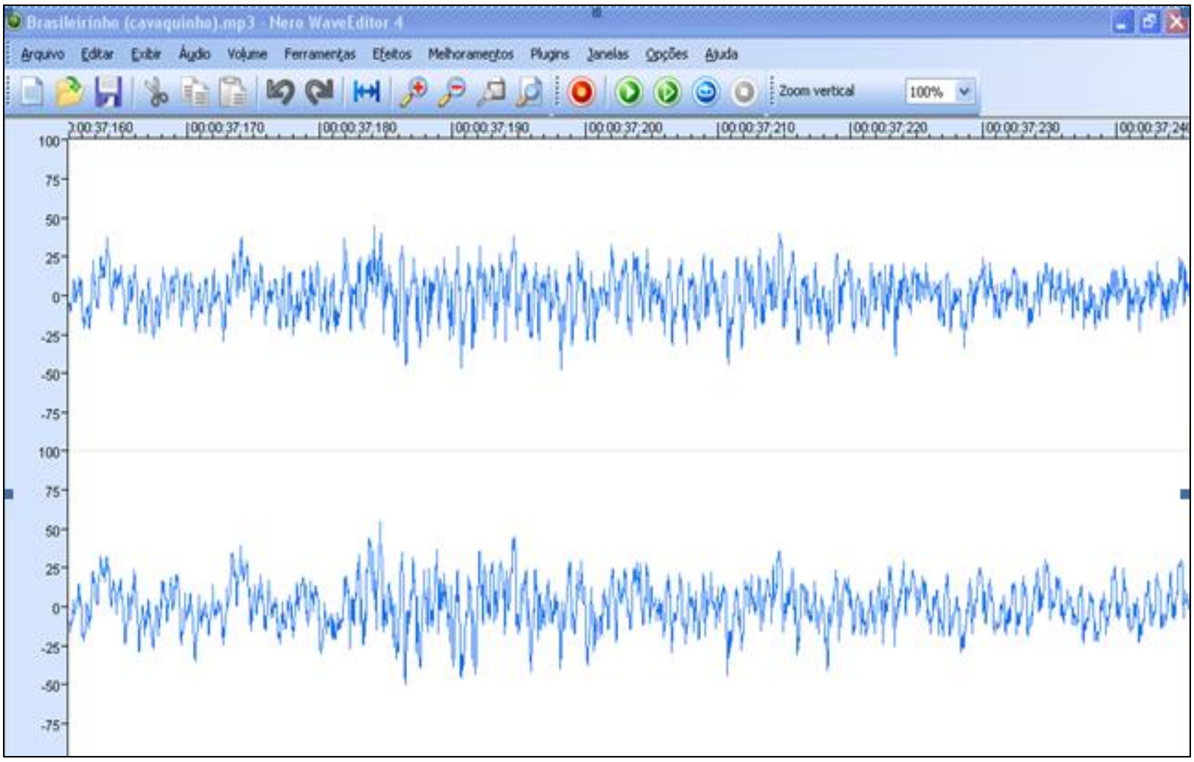
Para relacionar a função seno com a ideia de ondas sonoras, nos resta incluir a noção de tempo no sistema definido. Para tal, multiplicamos a notação de um ciclo completo (2π) pelo tempo necessário t, em segundos. Notamos então que, 2πt varia de 0 a 2π enquanto t varia de 0 a 1 segundos, o que corresponde a 1Hz. Podemos ainda generalizar o processo para outra frequência qualquer, multiplicando o ciclo pelo valor f referente à frequência desejada, obtendo assim $2\pi ft$, que vai girar f vezes em torno do ciclo, isto é, de 0 a 2π, enquanto t varia de 0 a 1. Sendo assim, um gráfico de sen($2\pi ft$) descreve f ciclos cada vez que t aumenta uma unidade, o que define uma "função temporal" aceitável para modelar fenômenos ondulatórios mais simples. Resta-nos agora pensar no ponto de partida do processo, chamado em acústica de fase f_0, e a amplitude k que representa os pontos de máximo e mínimo oscilatório. Para incluir tais conceitos, basta utilizarmos as ideias básicas de gráfico da própria função seno, somando a fase ao ciclo e multiplicando a expressão resultante pela amplitude.

Juntando todos os dados, temos a função contínua do tempo, como é chamada em acústica, definida por $F(t) = k.\text{sen}(2\pi ft + f_0)$ que descreve o som senoidal de uma forma geral e que assume proporções ainda maiores unida ao Teorema de Fourier, que diz que "Um sinal periódico qualquer é composto de (ou pode ser decomposto em) uma serie de ondas senoidais com frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental f, cada uma com uma determinada amplitude e uma determinada fase, mais uma componente continua (de frequência zero)", permitindo o estudo de ondas mais complexas por intermédio de outras mais básicas.

As figuras a seguir mostram uma singela análise de um fragmento de "O trenzinho caipira", de Heitor Vila Lobos, e outro de "Brasileirinho", de Waldir Azevedo, ambas obtidas através do programa Nero WaveEditor 4. Observe que a velocidade e altura das músicas diferenciam bem os gráficos, demonstrando uma relação intrínseca entre a quantidade de detalhes em sua composição e a complexidade da decomposição das ondas senoidais por ela descrita. Outro ponto interessante a salientar é que o programa supracitado é de fácil acesso, sendo umas das ferramentas da nona edição do software Nero, que é um programa muito comum na maioria de nossos computadores, o que facilitaria o estudo dessas propriedades juntamente com os alunos.



O trenzinho Caipira – Villa Lobos



Brasileirinho – Waldir Azevedo

A análise gráfica destas músicas, nos ajuda um pouco melhor a entender todas as analogias mencionadas anteriormente sobre as diferenças entre o ponto de vista prático e teórico dos constituintes das ondas sonoras. Notemos que quanto mais rápida é a composição, mas difícil fica a aplicação do Teorema de Fourier, demonstrando também, uma maior quantidade de diferentes técnicas de elaboração musical, além de enfatizar a impossibilidade da descrição de um fenômeno sonoro através de uma senóide convencional.

1.4. Intensidade sonora e logaritmos

Outra relação interessante entre Matemática e Música ocorre no estudo da intensidade sonora, que representa o fluxo de energia por unidade de área e pode variar em escalas bem grandes. Devido a este fato associado à maneira em que percebemos o volume de um determinado som, surge a necessidade de expressar logaritmicamente esta intensidade.

Acusticamente falando, a percepção é dita logarítmica quando se baseia em uma razão de valores, isto é, de 1 para 2 bem como de 2 para 4, resultantes da razão ½. Pelo mesmo motivo, temos estudos igualmente desenvolvidos em escalas logarítmicas para a frequência sonora, haja vista que os intervalos entre as notas são representados através de razões entre frequências como, por exemplo, em um intervalo de oitava, melhor explicado no decorrer do trabalho, representado pela mesma razão de ½.

A escala logarítmica referida é fundamentada na razão entre a densidade ou fluxo de potência real (I_{REAL}) e uma intensidade de referência (I_{REF}), geralmente 1 pico watt por metro quadrado (10^{-12} Wm^{-2}), formulada como $I = 10 \log \left(\frac{I_{REAL}}{I_{REF}}\right)$, onde I descreve o nível de intensidade sonora. O fator 10 é relacionado a uma aproximação deste resultado com a menor variação que o ouvido humano é capaz de perceber, denominando-se bel para uma mudança deste fator na razão da densidade de potência. Com isso, uma mudança equivalente a uma unidade inteira é chamada de decibel (dB), unidade muito conhecida, por exemplo, quando citamos a adequação de níveis de ruído toleráveis à sociedade.

Outra medida muito similar à descrita acima é feita, geralmente quando nos referimos à amplitude de uma onda, para calcular o nível de pressão sonora $P = 20 \log \left(\frac{P_{REAL}}{P_{REF}}\right)$, sendo P_{REAL} a pressão sonora real, medida em Pascal (Pa), e P_{REF} uma pressão referente, medida em microPascais (μPa). Interessante o fato de essa pressão poder variar entre menos de 20μPa, mínimo de audição, e mais que 20Pa, limiar da dor para o ouvido humano, o que dimensiona a sensibilidade de nosso aparelho auditivo, explicando a necessidade da utilização de escalas logarítmicas, que ainda sustentarão outras relações norteadoras deste trabalho.

1.5. Intervalos musicais e logaritmos

Um intervalo musical é a distância que separa duas notas, podendo também ser considerado como a relação das frequências entre elas duas. Classificam-se de acordo com a simultaneidade ou não dos sons e a altura entre eles. O tom, que seria a percepção de um indivíduo da frequência de um som puro, fato praticamente impossível, é a unidade de medida destes intervalos, juntamente com sua metade, o semitom. Para intervalos inferiores a um semitom, utilizamos também como unidade, o Savart e o Cent, sendo este último equivalente a 1/100 de um semitom da escala de temperamento igual, o que o torna um dos mais descritos na atualidade. O Savart era uma das unidades mais difundidas na Europa do século XIX, sendo posteriormente substituída pelo Cent, criado em 1885 por Alexander John Ellis. A diferença entre estas unidades é perceptível, através do conceito de logaritmos, de maneira muito análoga a já vista anteriormente. Seja C a quantidade de Cents de um intervalo musical entre duas notas de frequências f_1 e f_2, temos que $C = 1200 \log_2 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)$. Por outro lado, dados a quantidade S de Savarts de um intervalo entre as mesmas notas utilizadas no estudo anterior, temos que $S = 1000 \log \left(\frac{f_1}{f_2}\right)$. Note que:

$$S = C.x \Longrightarrow x = \frac{S}{C} \Longrightarrow x = \frac{1200.\log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)}{1000.\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} \Longrightarrow x = \frac{6}{5} \cdot \frac{\log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)}{\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{6}{5} \cdot \frac{\frac{\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)}{\log 2}}{\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} \Longrightarrow x = \frac{6}{5} \cdot \frac{\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)}{\log 2} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} \Longrightarrow x = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{\log 2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x \cong \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{0{,}30} = \frac{6}{5} \cdot \frac{30}{100} = 4$$

O que equivale a dizer que um Savart vale aproximadamente 4 Cents (3,98 para ser mais específico).

A nomenclatura dos intervalos musicais é baseada na quantidade de semitons entre as notas musicais, conforme a tabela a seguir:

Nome	Uníssono	Segunda Menor	Segunda Maior	Terça Menor
Distância	0 semitons	1 semitom	2 semitons	3 semitons

Terça Maior	Quarta	Tritono	Quinta	Sexta Menor
4 semitons	5 semitons	6 semitons	7 semitons	8 semitons

Sexta Maior	Sétima Menor	Sétima Maior	Oitava
9 semitons	10 semitons	11 semitons	12 semitons

Convém ressaltar que: 1)Os intervalos que não possuem diferenciação como, por exemplo, a quarta, também são chamados de intervalos justos; 2)O trítono (três tons) também é chamado de Quarta aumentada ou Quinta diminuta; 3)Intervalos com a mesma distância em semitons são chamados de enarmônicos; 4)Os termos “maior”, “menor”, “aumentado” ou “diminuto”, dentre outros que não foram citados, indicam se a frequência entre os intervalos são mais ou menos consonantes, isto é, intervalos mais ou menos estáveis, de som melhor, mais agradável. Do contrário, chamamos o intervalo de dissonante.

1.6. Notas musicais e seus harmônicos

Considera-se uma nota musical como uma representação de um som pré-estabelecido em uma escala ou um elemento mínimo deste som formado por um único modo de vibração do ar, cada qual com sua duração e frequência associada. Na prática, notas musicais são sons pré-definidos, que ao serem ordenados formam uma composição musical, desde uma simples vinheta de um comercial de televisão até uma peça erudita.

As notas mais difundidas na atualidade são: DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ e SI, nomenclatura atribuída a Guido D'Arezzo, monge italiano muito importante no desenvolvimento musical. Em alguns países, sobretudo os latinos, utiliza-se as letras C, D, E, F, G, A e B, para representar, na ordem mencionada acima, as notas musicais ocidentais. Este simbolismo é muito utilizado nos estudos de acordes de violão ou de uma guitarra, por exemplo, podendo vir acompanhadas, dentre outros símbolos, de um #, que representa o sustenido (aumentar ½ tom), de um *b*, que representa o bemol (diminuir ½ tom) ou ainda, de um *m*, que representa uma nota menor (diminuída de 1 tom).

Observe abaixo, o hino de São João, muito cantado por coristas antes de cada apresentação evocando sucesso, sendo a fonte da nomenclatura de D'Arezzo, utilizada até os dias atuais:

Ut queant laxis	Para que teus fiéis
*Re*sonare fibris	Possam, com todas as fibras
*Mi*ra gestorium	De sua alma
*Fa*muli tuorum	Cantar as maravilhas da vida
*Sol*ve polluti	Purifica seus lábios manchados
*La*bii reatum	De pecado
*S*ancte *I*ohannes	Ó São João!

A nota *Ut* foi substituída pela nota DÓ por sugestão de um músico italiano chamado Giovanni Battista Doni, afirmando que a nota antiga não combinava com o solfejo, a arte de cantar intervalos musicais seguindo suas frequências (alturas) e ritmos anotados em dada partitura (padronização da escrita mundial). Já outros afirmam intenções e significados esotéricos, relacionados com cosmogonia, isto é, lendas e teorias sobre a origem do universo para a alteração da nomenclatura. Assim baseado, D'Arezzo haveria realizado a troca para respeitar a escala/escada de Jacó, que utilizava as notas para explicar os "degraus sucessivos da criação", como podemos observar em seguida:

"DÓ de Dominus (Senhor): Deus absoluto, criador;

SI de Sidereus orbis: Céu estrelado, união dos mundos;

LÁ de Lacteus orbis: Via Láctea, o nosso mundo;

SOL de Sol mesmo, o nosso Sol;

FÁ de Fatum: Mundo planetário que influencia o nosso destino;

MI de Mistus orbis: Terra, mundo imperfeito entre o bem e o mal;

RÉ de Regina astris: Lua, regente da sorte humana."

(Mouravieff – Gnôsis)

Como já mencionado, nenhum som natural é puro e isto se deve ao fato que, quando um corpo vibra, nunca o faz sozinho, sem alterar corpos vizinhos. Sendo assim, quando tocamos uma nota em um instrumento musical, seu som vem sempre acompanhado de harmônicos, isto é, de alterações da frequência fundamental de sua onda propagadora. Convém ressaltar o fato da denominação "harmônico", somente ser utilizada para múltiplos inteiros da frequência da onda. Em termos mais simples, podemos exemplificar os harmônicos como aqueles "gritos" emitidos por uma guitarra, quando seu executor, encosta levemente o polegar ou a palheta ou até mesmo os dois juntos na corda durante um solo. Comprova-se que os harmônicos teriam sido descobertos intuitivamente por construtores de órgãos experimentalmente, buscando obter diferentes timbres.

1.7. Escalas Musicais

Escalas musicais são sequências de tons pela frequência ou alturas selecionadas entre as percebidas pelo ouvido humano (cerca de 30, visto que somos capazes de distinguir alturas correspondentes a aproximadamente 0,03 semitom). O intervalo de oitava é o adotado, geralmente, como intervalo de referência na formação de escalas musicais, de modo que os outros intervalos sejam subdivisões dele. Considera-se este intervalo como padrão, pois ele descreve com perfeição a diferença entre a afinação de uma mulher (ou uma criança) para um homem ao formarem um dueto, isto é, ao ouvir ambas as vozes simultaneamente, as percebemos com uma oitava de diferença.

Talvez seja na idealização de escalas musicais que a relação entre Matemática e Música seja dada de forma mais intrínseca, através de conceitos básicos para ambos os campos. Soma-se dois intervalos multiplicando suas razões e a operação de subtração ocorre dividindo-as. Para achar sua inversão, basta multiplicar sua razão por ½, razão que representa a oitava, dentre outras operações desenvolvidas no capítulo seguinte.

Várias escalas foram criadas em toda parte do mundo, desenvolvendo-se sempre mediante erros que eram percebidos e alterados buscando uma conciliação entre razões de intervalos simples e a melhor sonoridade possível, com o máximo de concordância entre as notas constituintes, através de temperamentos (correções nas escalas). Podemos citar, como exemplo, escalas árabes com 24 divisões (o dobro de divisões que usamos, da denominada escala igualmente temperada), sendo elas desiguais no interior da oitava com até 133 maneiras de agrupar os sons. Além desta, existe ainda, uma escala desenvolvida no norte da Índia com 22 notas curtamente espaçadas, diferente da outra desenvolvida no sul do mesmo país, com 28 intervalos bem mapeados. Fatos como estes, transformam o processo de composição num grande jogo de análise combinatória, como cita o músico e estudioso da área, Alberto Marsicano.

Capítulo 2: A matemática das escalas

2.1. O monocórdio

Dentre as inúmeras experiências feitas e das formas pré-históricas de desenvolvimento da música, a de maior destaque e que, para muitos, representa o marco inicial do estudo da música como ciência-arte, foi a experiência do Monocórdio. Este instrumento, ao qual se atribui o advento a Pitágoras, ainda que possa ter sido desenvolvido muito antes, é composto por uma única corda (daí seu nome, do grego monochórdon, “um fio”), estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma régua, ao longo da qual outro cavalete, móvel, desliza possibilitando a execução (vibração) de subdivisões desta corda.

Monocórdio (Museu de Nuremberg - Alemanha)

A experiência de Pitágoras com este instrumento é considerada como a primeira registrada na história da ciência para análise de fenômenos artificialmente através de algum dispositivo isolado. D'Arezzo descreve no Micrólogus, o Tratado de Música, que "um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia em uma bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia (concordiam) que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia (modulationis) estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso", lenda esta que narra o possível início dos estudos das relações entre os dois campos que norteiam este trabalho, culminando no desenvolvimento do monocórdio.

A música era muito utilizada na cultura grega em cerimônias e cultos aos Deuses, que utilizavam, sobretudo, instrumentos de cordas e sopro, nos quais cabiam perfeitamente os experimentos de Pitágoras, que se baseavam em subdivisões da corda em busca de sons agradáveis. Pertence aos Pitagóricos também, o fato de que as consonâncias, isto é, esses sons agradáveis, dependiam da relação entre os comprimentos dos sons ou ainda, das frações da corda independente de seu tamanho enquanto solta. Eles marcaram onze traços sobre a régua, de modo a facilitar o estudo das doze divisões da corda, sendo este número de divisões baseado na quantidade de divisores que este número possuía, em vista da relação inicial entre os martelos da lenda grega. Tudo isso comprovava a doutrina do filósofo, que acreditava que tudo podia ser explicado através dos números, como fundamento da ciência natural, chegando até a comparar, pouco tempo depois, a ordenação das distâncias dos planetas a terra com números referentes aos acordes musicais.

2.2. A escala Pitagórica

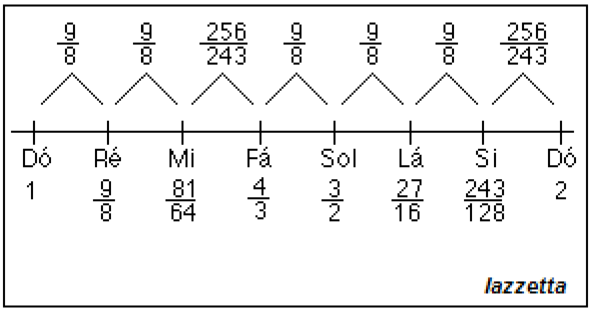
De posse do monocórdio, Pitágoras percebeu que se posicionasse o cavalete móvel na metade do comprimento da corda e a fizesse vibrar, obteria um som bastante parecido com o original, referente à corda solta, porém um pouco mais agudo que foi chamado de intervalo de oitava. A partir daí, começou-se a relacionar este intervalo com a razão 2:1 (representante da divisão da corda) e a se buscar novos sons que fossem gerados da mesma forma e que juntos completassem este intervalo, dito perfeito. De maneira semelhante, dois intervalos importantes cumpriram esse papel, os ditos de quinta e quarta, sendo o primeiro representado pela razão 3:2, preferido do pensador devido a sua crença na divindade do número três, e o segundo por 4:3. Cabe ressaltar, que a divisão feita na corda, correspondente à sua metade (½) por exemplo, revela uma nota cuja frequência é 2/1, lembrando que esta corresponde ao inverso do comprimento da corda que a descreve, fato comprovado por D'Alembert.

Antes de iniciarmos o processo de construção desta escala, convém mencionar algumas noções básicas do processo construtivo de uma escala: 1) Uma escala musical não se limita a um determinado instrumento, podendo assim, ser tocada infinitamente, uma vez que o som é infinito, independente da quantidade de cavidades (instrumentos de sopro), teclas ou extensão de uma corda; 2) Existem intervalos entre as várias notas de uma escala, todos determinados de acordo com o seu tamanho; 3) A nomenclatura destes intervalos é designada conforme a quantidade de notas que estão entre eles, a contar com a última. Exemplo: Uma quinta acima de DÓ, significa que devemos contar mentalmente (DÓ-RÉ-MI-FÁ-*SOL*) até concluir que a quinta nota, a contar do DÓ é a nota SOL.

De posse destes preceitos, resta apenas adotar a nota DÓ como ponto inicial e as posições dos cavaletes fixos do monocórdio, estando o inicial no referente ao número 1 da régua e o final no referente ao número 2, de modo que o valor inicial da frequência de DÓ seja 1 para a primeira oitava e 2 para a segunda oitava. Busquemos, inicialmente, usar apenas o intervalo de quinta, cuja frequência é 3/2, para encontrar notas contidas nesta primeira oitava (entre 1 e 2). Uma quinta acima de DÓ, nos dá um SOL, isto é, DÓ → RÉ → MI → FÁ → *SOL*. Matematicamente temos: $1.\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, fração cujo valor 1.5 pertence ao intervalo real que definimos como primeira oitava. Portanto, DÓ corresponde à frequência 1 e SOL à frequência 3/2. Somando uma quinta à nota SOL, obtemos a nota RÉ. Musicalmente, temos SOL → LÁ → SI → DÓ → *RÉ*. Numericamente, fazemos $\frac{3}{2}.\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ cujo valor é 2.25, ou seja, um valor correspondente à nota RÉ na segunda oitava, o que foge ao nosso objetivo. De modo a ajustar este problema, trazemos esta nota para a oitava anterior, o que equivale a dividir a fração por 2/1 ou simplesmente multiplicá-la por ½. Sendo assim, $\frac{9}{4}.\frac{1}{2} = \frac{9}{8}$, corresponde ao valor 1.125, agora sim entre 1 e 2, donde concluímos que RÉ possui frequência 9/8. Seguindo o processo, temos que uma quinta sobre o RÉ corresponde a um LÁ, ou seja, RÉ → MI → FÁ → SOL → *LÁ*. Operando as frequências, é fácil ver que $\frac{9}{8}.\frac{3}{2} = \frac{27}{16}$, valor compreendido entre nossos limitantes, o que mostra que a frequência da nota LÁ é 27/16. Outro problema acontece quando reaplicamos um intervalo de quinta sobre a nota recém-obtida, pois musicalmente temos LÁ → SI → DÓ → RÉ → *MI*, embora matematicamente o valor não pertença ao intervalo da primeira oitava, uma vez que $\frac{27}{16}.\frac{3}{2} = \frac{81}{32} \cong$, 2.531 que é maior que 2. Devemos então, tornar a diminuir uma oitava, como anteriormente, isto é, $\frac{81}{32}.\frac{1}{2} = \frac{81}{64}$, que se enquadra perfeitamente em nosso foco. Repetindo o processo, obtemos, a partir do MI, a nota SI (MI $\longrightarrow$ FÁ $\longrightarrow$ SOL $\longrightarrow$ LÁ $\longrightarrow$ *SI*). Buscando a frequência desta nota, temos $\frac{81}{32}.\frac{3}{2} = \frac{243}{128} \cong 1.898$. Fato interessante ocorre na obtenção da nota FÁ. Ao aplicarmos o processo das quintas mediante a nota SI, isto é, SI $\longrightarrow$ DÓ $\longrightarrow$ RÉ $\longrightarrow$ MI $\longrightarrow$ *FÁ*, obtemos uma frequência fora de nossos limites e que necessita de correção. Temos: $\frac{243}{128}.\frac{3}{2} = \frac{729}{256} > 2 \Longrightarrow \frac{729}{256}.\frac{1}{2} = \frac{729}{512}$, que matematicamente está adequada à nossa análise. Porém, esta nota não é o FÁ correto que buscamos e sim um FÁ#, musicalmente diferente do que é necessário para fechar o solfejo correto. Para solucionar este impasse, torna-se indispensável à recorrência ao intervalo de quarta, cuja frequência é 4/3. Note que a nota FÁ, está a uma quarta do DÓ inicial (DÓ $\longrightarrow$ RÉ $\longrightarrow$ MI $\longrightarrow$ *FÁ*) e, assim sendo, sua frequência é $1.\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

A utilização do intervalo de quarta em nada muda a vontade de Pitágoras de criar uma escala de limite 3, isto é, onde o maior número primo utilizado fosse o 3 e cujos valores fossem combinações de potências de 3 e 2, na forma de razão. Deve-se inclusive observar que diminuir uma quarta a partir de SOL também resulta em RÉ ($\frac{3}{2}.\frac{3}{4} = \frac{9}{8}$), bem como, fazendo o mesmo a partir de LÁ, obtemos o MI ($\frac{27}{16}.\frac{3}{4} = \frac{81}{64}$), o que mostra que o processo de obtenção das notas da escala não é único. No entanto, surge mais um dos muitos problemas que arraigaram Matemática e Música neste cenário: como $\frac{3^{m}}{2^{n}}$=2, com m e n naturais? Em outros termos, como a junção destas subdivisões pode resultar em um intervalo de oitava? Esta impossibilidade, junto com algumas inadequações musicais, evidenciou a necessidade de sofisticações no processo.

Antes de prosseguirmos com o aprimoramento necessário, vamos observar as distâncias entre estas notas: É fácil ver que o intervalo entre RÉ e DÓ é de 9/8; Entre MI e RÉ, temos $\frac{81}{64}:\frac{9}{8}$, o que também se equivale a $\frac{81}{64}.\frac{8}{9}=\frac{9}{8}$, bem como os intervalos entre FÁ e SOL, SOL e LÁ além de LÁ e SI; O intervalo entre FÁ e MI é $\frac{4}{3}.\frac{81}{64}=\frac{256}{243}$, da mesma forma que o entre SI e DÓ. Estes intervalos são, respectivamente, tom e semitom pitagóricos diatônicos. Em suma, confira as frequências e os intervalos no esquema abaixo:



Como vimos no decorrer da construção da escala, existem ainda os acidentes musicais, nomenclatura utilizada para indicar a ocorrência ou a necessidade de ocorrência de um acréscimo (sustenido - #) ou decréscimo (bemol – *b*) de um semitom. Além do exemplo já apontado para o caso do FÁ# encontrado no ciclo das quintas, temos que uma quinta abaixo de FÁ resulta em Si*b*. Lembrando que, matematicamente isso é equivalente a $\frac{4}{3}:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}.\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$, um número que é inferior a 1 e, consequentemente, fora do objetivo. Aumentando uma oitava, fato inédito até o presente momento, temos $\frac{4}{3}.\frac{2}{1}=\frac{16}{9}$, ou ainda, 1.777... , que representa uma frequência um pouco inferior à obtida para o SI (1.898). A utilização dos intervalos de quarta e quinta na criação da escala de Pitágoras mostra que existe outra espécie de semitom, o cromático, que diferencia o FÁ# encontrado do FÁ, por exemplo. Temos que $\frac{729}{512}:\frac{4}{3}=\frac{729}{512}.\frac{3}{4}=\frac{2187}{2048}$.

Portanto, para completar a escala, que com a adesão do semitom cromático passa a ser chamada de Escala Cromática Pitagórica, resta obter o DÓ#, Mi*b* e SOL#. Utilizamos o semitom cromático para obter notas sustenidas: DÓ + 1 semitom cromático = DÓ#, ou seja, $\frac{1}{1}.\frac{2187}{2048}=\frac{2187}{2048}$; SOL + 1 semitom cromático = SOL#, isto é, $\frac{3}{2}.\frac{2187}{2048}=\frac{6561}{4096}$. Por outro lado, utilizamos o semitom diatônico para obter notas bemóis: RÉ + 1 semitom diatônico = MI*b*, que matematicamente, significa que $\frac{9}{8}.\frac{256}{243}=\frac{32}{27}$; LÁ + 1 semitom diatônico = Si*b*, ou seja, $\frac{27}{16}.\frac{256}{243}=\frac{16}{9}$, já demonstrada anteriormente de outra forma. Observe que todas as frequências pertencem ao intervalo entre 1 e 2, como o proposto, e assim sendo, a escala está completa: DÓ, DÓ#, RÉ, MI*b*, MI, FÁ, FÁ#, SOL, SOL#, LÁ, SI*b* e SI. Outro ponto que não pode ser omitido é o fato das notas mais consonantes possuírem frequências representadas por frações simples, reforçando o pensamento de Paul Hindemith: "O ouvido humano é um instrumento maravilhoso, que não se contenta em separar o grande do pequeno (...), ouvindo as relações numéricas simples como sendo belas, mostrando quanto os números e a beleza, as matemáticas a as artes estão ligadas".

O problema da Escala Pitagórica, como já referido, reside no processo fechamento do ciclo que fizemos para mais oitavas. Ao tomarmos o FÁ como nota inicial, por exemplo, e aumentarmos doze quintas, obteremos um MI#, sete oitavas acima e, portanto, equivalente ao FÁ inicial. Porém, matematicamente, temos $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{1}\right)^{7} = \frac{531441}{524288}$, ou ainda, aproximadamente 1.014, ao invés da frequência 1 adotada para qualquer nota que inicie o processo. Esta frequência obtida corresponde à diferença entre os dois semitons considerados ($\frac{2187}{2048} : \frac{256}{243} = \frac{2187}{2048} . \frac{243}{256} = \frac{531441}{524288}$) e é chamada de coma pitagórica, representando a distância entre notas enarmônicas (diferentes com o mesmo som). Musicalmente falando, temos que a sequência desafina, fazendo com que a nota seguinte "uive", num fenômeno apelidado de "Quinta do lobo". Dessa maneira, exclui-se a utilização desta escala mediante ao desenvolvimento musical.

2.3. A escala temperada

Com o passar dos tempos, outras escalas foram sendo desenvolvidas tanto no ocidente quanto no oriente, podendo citar a escala diatônica justa no Ocidente e a escala pentatônica no Oriente, como bons exemplos deste processo evolutivo, que visa até os dias atuais uma conciliação entre beleza e utilidade. Buscando-se o máximo de intervalos naturais (de acordo com as possibilidades) dentro de uma oitava, surge a escala temperada.

A escala temperada é baseada em doze semitons igualmente divididos dentro da oitava, de modo que notas enarmônicas possuam a mesma frequência e que exista um maior padrão matemático de criação. Como havíamos observado, na escala Pitagórica, os intervalos entre DÓ e RÉ, RÉ e MI, além de FÁ e SOL, possuem um tom cada como distância enquanto o intervalo entre MI e FÁ possui apenas um semitom. Tudo isso é reorganizado para escala temperada, basicamente, através de semitons, de modo que os intervalos entre DÓ e RÉ, RÉ e MI, FÁ e SOL, passem a ter distância de dois semitons cada, enquanto o intervalo entre MI e FÁ mantenha-se com apenas um. Uma simples alteração contextual que faz com que o intervalo de quinta seja medido por sete semitons.

Feita a mudança intervalar, como todas as frequências juntas devem gerar um intervalo de oitava, tome como d a distância entre as notas, lembrando que a operação de somar intervalos é transformada na operação de multiplicação das frequências. Temos então, que d.d.d.d.d.d.d.d.d.d.d.d = 2 e, consequentemente, $d^{12} = 2 \Longrightarrow d = \sqrt[12]{2}$ ou, aproximadamente, 1.059. Este intervalo é chamado de semitom temperado e facilita a criação de uma espécie de fórmula para o cálculo das distâncias intervalares entre as notas nesta nova escala: $d = \sqrt[12]{2^n}$, onde n é o número de semitons presentes em cada intervalo. Desse modo, temos que a nota original, no nosso caso o DÓ, continua possuindo frequência 1, uma vez que, $\sqrt[12]{2^0} = 1$. A próxima nota é o DÓ# (ou Ré*b*), cuja frequência é dada por $\sqrt[12]{2^1} \cong 1.059$, como já observado. A nota RÉ possui frequência $\sqrt[12]{2^2} \cong 1.122$ e assim por diante, como descrito na tabela a seguir:

Escala Temperada - Frequências	
DÓ	$\sqrt[12]{2^0} = \sqrt[12]{1} = 1$
DÓ# (ou Ré*b*)	$\sqrt[12]{2^1} = \sqrt[12]{2} \cong 1.059$
RÉ	$\sqrt[12]{2^2} = \sqrt[12]{4} \cong 1.122$
MI*b* (ou RÉ#)	$\sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8} \cong 1.189$
MI	$\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16} \cong 1.260$
FÁ	$\sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{32} \cong 1.335$
FÁ# (ou SOL*b*)	$\sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64} \cong 1.414$
SOL	$\sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128} \cong 1.498$
SOL# (ou Lá*b*)	$\sqrt[12]{2^8} = \sqrt[12]{256} \cong 1.587$
LÁ	$\sqrt[12]{2^9} = \sqrt[12]{512} \cong 1.682$
SI*b* (ou LÁ#)	$\sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[12]{1024} \cong 1.782$

SI	$\sqrt[12]{2^{11}} = \sqrt[12]{2048} \cong 1.888$
DÓ (uma oitava acima)	$\sqrt[12]{2^{12}} = \sqrt[12]{4096} = 2$

É fácil perceber, através desta tabela, que as aproximações dos resultados das frequências omitem tanto o fato delas formarem uma progressão geométrica de ordem $\sqrt[12]{2}$, quanto uma progressão aritmética de segunda ordem cuja razão é 0.004. Verificando apenas este segundo fato, visto que o primeiro é observável mediante o auxílio da tabela, seguimos o raciocínio que 1.059 - 1.000 = 0.059, 1.122 - 1.059 = 0.063, 1.189 – 1.122 = 0.067, 1.260 – 1.189 = 0.071, 1.335 – 1.260 = 0.075 e assim sucessivamente, de modo que a sequência (0.059, 0.063, 0.067, 0.071, 0.075,..., 0.112) seja, de fato, uma PA de segunda ordem, salvo as aproximações.

De posse das duas principais escalas musicais, sob o ponto de vista matemático, cabe mostrar que é possível facilitar a comparação de intervalos musicais, independente da escala, através do uso do Cent, unidade já definida anteriormente. Adotando a escala temperada como base, temos que a oitava pode ser dividida em 1200 partes iguais e, consequentemente, um cent equivale a $\frac{1}{100}$ de cada semitom. Se dividindo um semitom em cem partes obtemos um cent de valor c, temos que cada semitom é igual a c^{100}, observando as operações não usuais pré-definidas para a construção de escalas musicais. Usando a base mencionada, temos que $c^{100} = \sqrt[12]{2}$, ou ainda, $c^{100} =$

$2^{\frac{1}{12}}$. Isto implica que c = $\sqrt[100]{2^{\frac{1}{12}}} = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{100}}$, de onde concluímos que c = $2^{\frac{1}{1200}}$. Seja n o número de cents, podemos observar que $c^n = 2^{\frac{n}{1200}}$ e, com isso, uma frequência f, calculada em cents, deve ter f = $2^{\frac{n}{1200}}$. Aplicando o conceito de logaritmos, fica simples ver que $\log f = \log 2^{\frac{n}{1200}} \Rightarrow \frac{n}{1200}.\log 2 = \log f$ $\Rightarrow$ n = 1200.$\left(\frac{\log f}{\log 2}\right)$, ou ainda, n = 3986. $\log f$. Note que o valor, em cents, de um intervalo de quarta é 3986. $\log\left(\frac{4}{3}\right)$, isto é, 498 cents e, do intervalo de quinta é 3986. $\log\left(\frac{3}{2}\right)$, ou seja, 702 cents. Sendo assim, 498 + 702 = 1200, o que verifica, matematicamente, um intervalo de oitava, mostrando mais uma vez o quão bela é a junção entre a Matemática e a Música.

Capítulo 3: Os matemáticos e a música

3.1. A evolução do relacionamento

Não se sabe ao certo quando se começou a estudar as relações entre Matemática e Música, porém existem passagens históricas que indicam a presença da música anteriormente aos experimentos descritos neste trabalho como, por exemplo, através de tambores utilizados por civilizações bem mais antigas que os gregos, mundialmente conhecidos como pioneiros neste estudo. Relatos apontam a existência de um osso de urso, com idade entre 43000 e 82000 anos, encontrada em 1995 na Eslováquia com perfurações capazes de produzir intervalos musicais com tons e semitons, que poderia ser o "instrumento musical" mais antigo (Scientific American, 1997).

Pode-se dizer que a junção entre estas duas áreas ocorre no momento em que se busca uma explicação científica para a relação entre música e emoção, onde muitas dificuldades musicais se tornavam grandes desafios matemáticos. Aliás, se ainda existe dúvida que ambas as áreas são interligadas, faça-se lembrar do Quadrivium da escola pitagórica, parte fundamental do aprendizado medieval, onde a música era uma das subdivisões da matemática, juntamente com aritmética, geometria e astronomia. Englobando esta arte como parte integrante do estudo matemático, os pitagóricos foram pioneiros no abalizamento cientifico da música, desenvolvido posteriormente através de vários outros grandes pensadores como Aristóteles, Arquitas e Aristoxeno.

Após a experiência do monocórdio, Descartes explicava que "as consonâncias pitagóricas eram naturais ao ouvido humano por serem baseadas em pulsações simples: 1 contra 2, 2 contra 3 e 3 contra 4, menos cansativas". Algumas correntes apontam para Tso-Kiu-Ming, grande amigo de Confúcio (pensador autodidata chinês), como inspiração para os progressos de Pitágoras nesse enlace, que em uma de suas viagens ao Oriente, haveria se deparado com o chinês que comparava seus cinco elementos tradicionais (água, fogo, madeira, metal e terra) com os cinco tons da escala pentatônica (Helmhotz, 1954). A partir daí, definiu-se uma classe de equivalência musical onde duas notas eram equivalentes se o intervalo entre elas fosse múltiplo inteiro da oitava fundamental, como já vimos anteriormente, unido ao fato de cada nota atingida ser relativa à nota mais grave definida como padrão inicial.

Já vimos anteriormente que a Matemática é base da construção das escalas, que derivaram dos estudos pitagóricos, e que sua evolução com o passar dos tempos trocou a naturalidade pela quantidade de subintervalos cabíveis em uma oitava. Da escala inicial surgia o problema da junção dos intervalos a fim de formar uma oitava, que matematicamente se resumia na resolução do seguinte problema: $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ nunca resulta em qualquer potência de 2. Este problema é aceitável musicalmente pelo seguinte fato: $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m \Rightarrow 3^n = 2^{m+n} \Rightarrow \frac{3^n}{2^{m+n}} = 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{3^n}{2^{m+n}}\right) = \ln 1 \Rightarrow \ln 3^n - \ln 2^{m+n} = 0 \Rightarrow n \ln 3 - (m+n)\ln 2 = 0 \Rightarrow n\ln 3 - m\ln 2 - n\ln 2 = 0 \Rightarrow n\ln 3 - n\ln 2 = m\ln 2 \Rightarrow n(\ln 3 - \ln 2) = m\ln 2 \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} \cong 0.585$. Este valor é bem próximo de 0.583, que corresponde a $\frac{7}{12}$, uma boa aproximação do nível de sensibilidade humana, a qual os gregos explicavam pelo fato de 7 e 12 serem primos entre si. Com isso, o que antes era proposto como um ciclo fechado se tornaria posteriormente numa espiral logarítmica.

Juntamente com os estudos teóricos, foram desenvolvidos vários meios facilitadores de estudos práticos como, por exemplo, versões um pouco mais recentes do próprio monocórdio (o Cânon). Falando-se da atualidade, temos o osciloscópio, que associado a um microfone, transforma eletronicamente ondas sonoras em impulsos elétricos disponíveis graficamente, que possibilitam o estudo do som através de funções, sobretudo trigonométricas.

3.2. Pensadores importantes da área

3.2.1. Gioseffo Zarlino (1517 - 1590)

Sendo um dos mais famosos teóricos musicais, além de compositor, Zarlino dizia que "assim como não pode ser verdadeiramente dito que um homem é mais homem que outro, também não se pode dizer que uma terça maior (ou menor) ou uma sexta colocada abaixo tem maior ou menor dimensão que uma colocada acima, ou vice-versa". Autor da base da educação científico-cultural em Inztituizioni Armonique, dando continuidade a Francisco Salinas (1513-1590) e Mersenne, foi responsável pelo estabelecimento das divisões do braço de um instrumento como o violão, por exemplo, em doze semitons iguais através de médias geométricas, que por sinal, foram desenvolvidas pelos pitagóricos na construção de escalas musicais.

Segundo ele, não se podia traduzir como dois uníssonos as razões idênticas (1:1 com 1:1), razões semelhantes como oitavas (1:2 e 4:8) e nem quintas (4:6 e 6:9), pois não se encontravam dentre os números harmônicos, nos quais residia a causa natural da consonância, de maneira geral. Posteriormente, Zarlino estendeu o limite pitagórico de 3 para 6, dito número perfeito, ou seja, àquele que é definido como soma de todos os seus fatores primos (1+2+3=1.2.3), incluindo sextas e terças dentre as consonâncias e instituindo os acordes maior, menor e justo, totalmente baseados, a exemplo de Pitágoras em suas crenças a respeito do número seis. Era apoiado também nas doutrinas de médias harmônicas e aritméticas juntamente com suas preferências e crenças na perfeição e naturalidade das consonâncias. Obtinha intervalos através destas médias: A quinta é média harmônica entre oitava e uníssono ($\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$) e a quarta é média aritmética entre os mesmos ($\frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$), do mesmo modo que a terça maior era média harmônica entre quarta e oitava ($\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$) e a terça menor era a média aritmética entre o uníssono e a quinta ($\frac{1+\frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{6}$).

Gioseffo trabalhou bastante na organização de consonâncias e dissonâncias, argumentando que "a dissonância motiva a consonância como a luz é mais encantadora à vista após a escuridão" (Lester apud Abdounur, 2006). Enquanto os pitagóricos relacionavam esta consonância à razão de suas frequências como pequenos números inteiros, através dos ciclos das quintas, ele colocou que " dois sons eram agradáveis ao ouvido humano se possuíssem harmônicos comuns e as dissonâncias corresponderiam à coincidência de harmônicos distantes, inexistindo o encontro de tais componentes para o caso de frequências incomensuráveis" (Martin apud Abdounur, 2006).

3.2.2. Arquitas de Tarento (428 a.C. – 347 a.C.)

Considerado um dos mais ilustres dentre os pitagóricos, este filósofo e cientista acreditava que a música deveria assumir um papel mais importante que a literatura na educação de crianças. Chamou a média harmônica, até então desconhecida, de média subcontrária observando que, como já citado, a quinta é "média subcontrária" entre a corda solta e sua metade. Ele descreveu que "o ouvido exigiria a escuta de apenas um som, ou seja, apesar de haver duas ou mais notas, estas se fundiriam, ouvindo-se o acorde resultante" (Abdounur, 2006). Deste modo, Arquitas pode ser considerado o primeiro a caracterizar o fenômeno sonoro como resultado de pulsações do ar, percebendo que quanto mais rápida a velocidade de pulsação do som, mais agudo seria – pense no exemplo de um carro de corrida, que passa fazendo um barulho muito mais agudo que um carro de passeio - fato melhor explicado posteriormente por Galileu, Mersenne e D'Alembert.

Arquitas foi além de Pitágoras usando as médias na geração dos intervalos musicais, servindo como base para Zarlino, como já vimos. Seus estudos tendiam para números irracionais, até então misteriosos aos pitagóricos e que viriam a consistir na base do temperamento. Foi considerado como mediador dos pensamentos de Aristoxeno (puramente baseados na percepção auditiva) e Pitágoras (mais voltados para cálculos exatos). Começou seus estudos buscando, inicialmente, uma afinação exata para a lira (instrumento de corda muito utilizado pelos gregos) e acabando por desenvolver o que hoje conhecemos como Acústica, ciência que estuda a essência dos sons independente do corpo que o provoca.

3.2.3. Marin Mersenne (1588 - 1648)

Padre francês, além de teórico musical e matemático, Mersenne acreditava que a média harmônica relacionava-se com a associação entre números e comprimentos de cordas, enquanto a média aritmética se relacionava com a associação destes números e os movimentos dos ventos. Estudou o som em diversos instrumentos e meios, como sinos e colunas de ar, sendo o primeiro a determinar a frequência de uma nota musical estabelecida, bem como a velocidade de propagação do som no ar. Além disso, estudou métodos para afinar e construir instrumentos, pesquisando desde os materiais adequados para a confecção de cordas e sinos, até a relação do som emitido por um recipiente com a quantidade de líquido nele, experiência que pode, facilmente, ser repassada aos nossos alunos sem maiores custos.

3.2.4. Johannes Kepler (1571 – 1630)

Astrônomo, astrólogo e matemático francês, foi um crítico ferrenho da supervalorização aritmética pitagórica concernentemente ao julgamento do caráter consonante de um intervalo musical. Kepler respondeu ao seguinte paradoxo de Mersenne: "Como uma corda, com seu comprimento, produz mais de uma altura ao mesmo tempo?". Este fato ocorreu mediante experimentos com cordas, estudando as frequências perceptíveis aos nossos ouvidos através da fórmula de Mersenne: $f = \frac{K}{L} . \sqrt[n]{\frac{T}{P}}$, sendo f a frequência, K uma constante proporcional, L o comprimento da corda, n $\in \mathbb{Z}$, T o tempo e P a densidade linear da corda.

Kepler considerou insuficiente a atenção atribuída à percepção auditiva em detrimento do "misticismo numerológico" da parte dos pitagóricos, julgando como "insatisfatória a experiência do monocórdio para intervalos consonantes" (Abdounur, 2006). Além disso, defendia a antiga existência de escalas peculiares a cada planeta, de modo que suas velocidades eram relacionadas com as frequências emitidas e considerando que os movimentos interplanetários produziam uma música tradutora da perfeição divina, como Abdounur cita Cartier, em 2006, fora a enunciação da proporcionalidade entre a altura de um som e sua velocidade.

3.2.5. René Descartes (1596 - 1650)

Filósofo, físico e matemático, o francês René Descartes foi, juntamente com Mersenne um das grandes fontes de subsídios indispensáveis à consolidação do Tratado de Harmonia, que Rameau escreveria um século depois, sendo uma das primeiras grandes obras do campo musical. Escreveu o Compendium Musicae tentando explicar a base da harmonia e da dissonância musical em termos matemáticos, obra esta que "apresentou um grande número de diagramas e tabelas matemáticas que ilustravam as relações proporcionais envolvidas em vários intervalos musicais" (Cottingham apud Abdounur, 2006) além de axiomas.

Para Descartes, fazia uma analogia entre comida e música, comparando a oitava com um pão e a quinta com guloseimas: "Se comessemos somente doces ou guloseimas, perderíamos nosso apetite mais rapidamente do que comendo apenas pão, embora ninguém negue que um pão seja menos agradável ao paladar do que gulodices" (René Descartes). Rameau cita que Descartes afirmava que o intervalo de quarta era apenas uma sombra do intervalo de quinta, além de acreditar que como existiam apenas três números concordantes 2, 3 e 5, sendo 4 e 6 junções destes, deveriam existir também apenas três consonâncias principais (quinta e terças maior e menor), das quais as outras derivariam.

3.2.6. Jean Philippe Rameau (1683 – 1764)

Filho de organista tornou-se um dos grandes compositores da época, mostrando características matemáticas ao revelar certa preocupação com a estrutura lógica de suas composições. Publicou o Tratado de Harmonia, em quatro livros, apresentando teorias sobre relações harmônicas e proporções, natureza e propriedades dos acordes, além de métodos de composição e acompanhamento, tudo baseado nas propriedades físicas do som.

Rameau dizia, em linguagem bem parecida com a da matemática, que “cada corda contém em si mesma todas as outras cordas menores que ela, mas não aquelas que são maiores; portanto, todos os sons agudos estão contidos em sons graves; porém os graves contrariamente, não estão contidos nos agudos” (Rameau apud Abdounur, 2006). Citou a relação entre a perfeição do intervalo de oitava com a diferença dos cantos, masculino e feminino, em uníssono e mostrou-se influenciado e concordante à maneira na qual Descartes tratava as consonâncias primárias, exatamente como anteriormente mencionado.

Jean foi também responsável pela relativização dos conceitos de proporções harmônicas e aritméticas em Música ao mencionar considerações de Desermes sobre consonâncias e movimentos da atmosfera. Relacionou as principais operações matemáticas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho, sendo considerado por muitos, como o primeiro a definir acordes e suas inversões, de modo a estabelecer relações numéricas omitidas por de trás das dissonâncias.

3.2.7. Outros grandes pensadores

Do mesmo modo que seria impossível citar todos os contribuintes no desenvolvimento da Música, como parte integrante da (e auxiliada pela) Matemática, seria também uma injustiça falar apenas de Pitágoras de Samos (aproximadamente 570 a.C. – 497 a.C). Buscando minimizar este problema, mencionarei sinteticamente outros pensadores tão importantes quanto os supracitados:

- Boethius (480 d.C. – 524 d.C.) escreveu sobre o assunto em cinco volumes no De Instituitione Musica, abordando aritmética, geometria, música e astronomia;
- Galileu Galilei (1564 – 1642) escreveu que nem o comprimento, nem a tensão e nem a densidade linear das cordas apresentavam-se como razão direta e imediata de intervalos musicais, e sim razões dos números de

vibrações e impactos de ondas sonoras diretamente em nosso tímpano. Iniciou a Física Musical, como é estudada atualmente;

- Joseph Sauveur (1653 – 1716) apesar de apresentar deficiência auditiva e de fala foi o primeiro a calcular o número absoluto de vibrações do som, sendo considerado um dos pais da Acúsitca. Ajudou a resolver o paradoxo de Mersenne;
- Leonhard Euler (1703 – 1783) explicou que no temperamento igual, a escala não possuía consonâncias exatamente puras, uma vez que embora o ouvido assimilasse um intervalo de quinta, de valor matemático 3/2, seu valor real era $2^{\frac{7}{12}}$, afirmando que o ouvido tendia a simplificar a razão percebida. Juntamente com Newton e Laplace, fundamentou a utilização de fórmulas matemáticas demonstrativas para a noção de propagação de ondas em uma época onde se conhecia apenas a possibilidade de produção de som por corpos vibrantes. Aprimorou o conceito de logaritmos desenvolvido por John Napier e Jost Burgi;
- Daniel Bernoulli (1700 – 1782) afirmou que a vibração de um corpo sonoro poderia ser observada como superposição de seus modos simples com distintas amplitudes, porém não havia princípios gerais sobre os quais a prova de tal afirmação poderia ser experimentada. Problema este que só seria solucionado recentemente, através de corpos vibrantes;

- Jean Le Ronde D'Alembert (1717 – 1783) descobriu que o comprimento de uma corda sujeita a uma tensão fixa era inversamente proporcional à frequência do som emitido pela corda referida, fato imprescindível para o estudo matemático das construções das escalas;
- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) mostrou como representar qualquer curva periódica pela superposição de ondas senoidais correspondentes às mais variadas frequências da curva original, comprovando a característica periódica do som e colaborando na explicação das relações entre consonâncias e pequenos números inteiros. Sendo assim, tanto uma corda solta como colunas de ar em instrumentos de sopro possuem a característica de vibrar não apenas como um todo, mas ainda simultaneamente como duas metades, três terços, quatro quartos, e assim por diante, mostrando que frações do tipo $f = \frac{n+1}{n}$., como 2/1, 3/2, 4/3, dentre outras, correspondiam à oitava, quinta, quarta e, assim sucessivamente (Abdounur, 2006). Concretizou ideias de Bernoulli em Acústica, dando início a estudos que posteriormente seriam direcionados a físicos como Helmhotz e Ohm.

Bibliografia

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música**: o pensamento analógico na construção de significados. 4ª ed. São Paulo: Escrituras, 2006.
BENSON, D. **Mathematics and Music**. Disponível em <http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/mathematical_offering.pdf>. Acessado em 17/12/2010.
BOYER, Carl Benjamin. Tradução de Elza F. Gomide. **História da Matemática**.. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
CUNHA, Niton Pereira. **Matemática & música**: diálogo interdisciplinar. 2ª Ed. Recife: Universitária da UFPE, 2008.
HARKLEROAD, Leon. **The math behind the music**. Cambridge University Press, 2006.
LAZZARINI, Victor E. P., **Elementos de Acústica**. Disponível em:< http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/index.htm>. Acessado em: 11/11/2009.
LUCCAS, S. **Matemática e Música a harmonia perfeita**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, PR, 1996.
NETTO, L, **Cálculo de Intervalos Musicais**. 2002.
NETTO, L, **Dimensionamento das Distâncias Entre os Trastes nos Instrumentos Musicais de Cordas**, 2002.
NETTO, L, Escala musical temperada - altura ou frequências das notas musicais
NETTO, L, **Como calcular os valores das frequências das demais conhecendo-se uma delas**, 2002.
NETTO, L, **O intervalo coma na escala igualmente temperada**, 2003.
NETTO, L, **Tem Música no Triângulo de Pitágoras**, 2003.
NETTO, L, **Uma Progressão Geométrica Muito Especial**, 2002.
NETTO, L, **Unidades de Medidas de Intervalos Musicais - O Cent e o Savart**, 2002.
OLIVEIRA, João Pedro. Recolha de textos (Encontros de música contemporânea de 2000) Fundação Calouste Gulbenkian
OLIVEIRA, Naylor. **A Física da música**. Disponível em:

<http://www.cdcc.sc.usp.br/ciencia/artigos/art_25/musica.html> Acesso em: 17/12/2010.

PERES, Larissa Suarez. **Matemática e Música: em busca da harmonia. Monografia apresentada** na Universidade do Grande ABC. Disponível em: < http://www.somatematica.com.br/>. Acesso em 28/12/2010.

RATTON, M. Música **e Matemática – A Relação Harmoniosa entre Sons e Números**. Disponível em http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/musica_matematica.htmAcessado em 17/12/2010.

RATTON, Miguel. **Escalas musicais - quando a matemática rege a música.** Disponível em: < http://www.cristianonogueira.xpg.com.br/escalasmusicais.htmAcesso em: 17/12/2010.

RODRIGUES, José Francisco. **A Matemática e a Música**. Colóquio/Ciências, nº23, p.17-32, 1999. Disponível em < http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf>. Acesso em: 13/12/2009.

TAVARES, Levi de Paula, **A Física da Música**. Disponível em: < http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/index.htm> Acessado em: 13/11/2009.

[Vídeo*]* *A música das esferas:* http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=22062

[Vídeo] "**Donald no mundo da Matemágica**" Disponível em DVD.

A matemática e a música, disponível em: http: www.esec-garcia-orta.rcts.pt. Disponível em: <http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/index.htm>. Acessado em: 11/11/2009.

<u>Sites auxiliares:</u>

< http://pt.wikipedia.org>
< http://caraipora.tripod.com/assuntos.htm>
< http://www.musicaeadoracao.com.br>